2П

УДК 519.1

В.І. Петренюк
Кіровоградський національний технічний університет, м. Кіровоград, Україна
petrenjukvi@rambler.ru

Ідентичність нециліндричних графів 3-мінімальним площинним графам

На основі методу φ-перетворень встановлено еквівалентність нециліндричних та 3-мінімальних площинних графів і запропоновано модифікований алгоритм побудови 3-мінімальних площинних графів.

Вступ

Розглянемо скінченний простий граф G, $G = (G^0,G^1)$, де G^0 – множина вершин, а G^1 – множина ребер, без кратних ребер та без петель, та його 2-кліткове мінімальне вкладення в орієнтовний замкнутий 2-багатовид Ω із ейлеревою характеристикою $\chi(\Omega)$, $\chi(\Omega) = 2 - 2\gamma$, де γ – рід графа G. Позначення та визначення φ-перетворення графів узяті із [1]. В [2] досліджувалися циліндричні графи з точки зору їхньої зовнішньопланарності та було отримано повний список із 38 графів, якими, як мінорами, охарактеризовані нециліндричні графи. Основний результат по 3-мінімальним графам, а саме їх характеризація методом φ-перетворення графів, наведено в [3], список із 34 3-мінімальних графів наведено в [4].

1 Ідентичність нециліндричних графів 3-мінімальним графам

Позначення 1. Згідно з [3] будемо розуміти під 3-мінімальним графом G такий площинний, що матиме наступні властивості: 1) щонайменше три 2-клітини, на границях яких розташовані всі вершини графа G, 2) видалення довільного ребра чи стискання в точку цього ребра призводить до порушення властивості 1).

Позначення 2. Згідно з [2] будемо розуміти під нециліндричним графом такий площинний граф HCG, що матиме більше двох 2-клітин, на границях яких розташовані всі вершини графа HCG, причому видалення довільного ребра графа HCG чи стискання в точку цього ребра призводить до розміщення всіх вершин графа на границях двох 2-клітин.

Задача. Розглянемо питання ідентичності нециліндричних та 3-мінімальних площинних графів та порівняємо графи із наведених списків на рис. 1 та рис. 2 із списком [2] та модифікований алгоритм побудови всіх 3-мінімальних площинних графів.

Історія проблеми. В [5] присутній короткий огляд робіт із цієї задачі та подібних задач відшукування списків графів, котрі б відігравали роль заборонених (із точністю до гомеоморфізму) підграфів для вхідних графів, які перевіряють на наявність властивості аналогічної «зовнішньої площинності» для деяких поверхонь.

Результат: твердження 1 щодо еквівалентності нециліндричних та 3-мінімальних площинних графів, теорема 1 про характеризацію 3-мінімальних площинних графів та модифікований алгоритм побудови всіх 3-мінімальних площинних графів.

Твердження 1. Будемо використовувати порядкову нумерацію числами 1, 2, 3, ..., 34 графів на рис. 1 і рис. 2, а для графів із списку [2] збережемо нумерацію. Маємо на-

ступні співвідношення для площинних графів:

0) графи нециліндричні та 3-мінімальні еквівалентні між собою;
1) всі графи із списку [4] є в списку [2];
2) відсутніми в списку [4] є графи θ_6, θ_7, K_5, $K_{3,3}$.

Доведення. Доведення 0) співвідношення випливає із позначень 1 та 2.

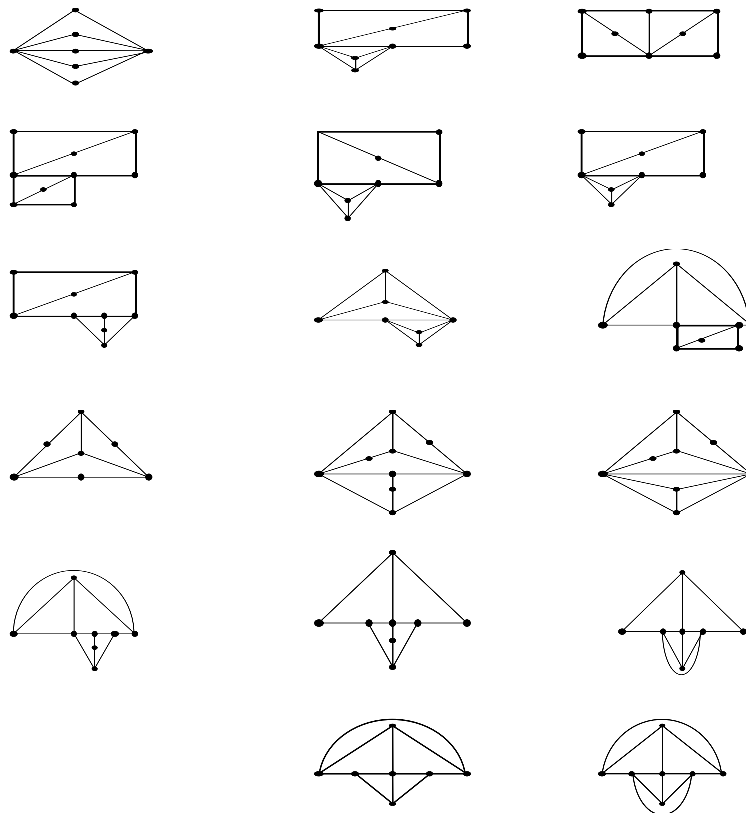


Рисунок 1 – Графи 3-мінімальні із порядковими номерами 1 – 18

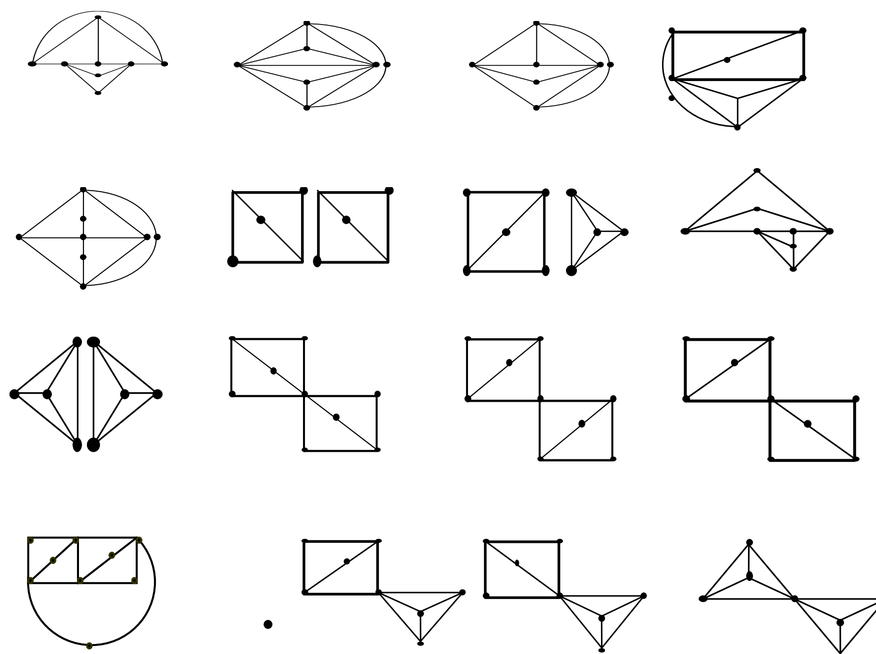


Рисунок 2 – Графи 3-мінімальні із порядковими номерами 19 – 34

2 Модифікований алгоритм побудови 3-мінімальних площинних графів

Розглянемо питання модифікації алгоритма [] побудови 3-мінімальних площинних графів, в основі якого лежав неточний результат по характеризації площинних графів із усіма суттєвими ребрами відносно числа досяжності множини вершин, що дорівнює 3, при операції видалення довільного ребра. Основна ідея полягатиме в тому, що такі графи матимуть не менше одного підграфа, гомеоморфного графам $K_{2,3}$, K_4, та не більше трьох таких підграфів; потрібно визначити характер та можливі варіанти з'єднання їх між собою.

Теорема 1. Нехай G – зв'язний площинний граф із наступною властивістю:

$$(\forall u)(u \in G^1)(t_{G\setminus u}(G^0) = t_G(G^0) - 1 = 2).$$

Тоді виконується одне із наступних тверджень:

1) $G = K_4^{'}$, де $K_4^{'}$ – граф K_4, у якого кожне ребро 1-підрозділене;

2) Існує φ-перетворення графа $\sum_{i=1}^{2} G_i$ в граф G, визначене наступним чином: $\varphi(\sum_{i=1}^{2} G_i, \sum_{j=1}^{n} (y_{1j} \dot{+} y_{2j})) \to (G, \{y_j\}_{j=1}^{n})$, та яке задовольняє наступним умовам:

а) $(\forall i, i = 1,2)[(G_i \neq K_4^{'}) \wedge ((G_i \cong K_{2,3}) \vee (G_i \approx K_4))]$;

б) $G_i(\{y_{ij}\}_{j=1}^{n}) = C_{G_i}^{n-1}(y_{i1}, y_{in})$ – простий ланцюг довжини $n-1$, графа G_i, де $y_{i1} \neq y_{in}$, $\{y_{ij}\}_{j=1}^{n} \subset G_i^0 \cup G_i^1$, $i = 1,2$ (при $n = 0$ простий ланцюг вироджується в точку y_{i1});

в) $G(\{y_i\}_{j=1}^{n})$ – простий ланцюг графа G довжини $n-1$ (при $n = 0$ простий ланцюг вироджується в точку y_1);

3) Існує φ-перетворення графа $G_0 + G_3$ в G, задане наступним чином: $\varphi(G_0 + G_3, \sum_{j=1}^{n}(Z_{0i} \dot{+} Z_{3j})) \to (G, \{Z_j\}_{j=1}^{n})$, та яке задовольняє наступним умовам:

а) G_0 – φ-образ графа $\sum_{i=1}^{2} G_i$, виписаний як у твердженні 2) цієї теореми;

б) $G_3 \approx K_{2,3}$; $G_0(\{Z_{0j}\}_{j=1}^{n})$ – цикл довжини n (можливо із діагоналями), графа G_0 (можливо, це границя зовнішньої грані графа) $f(G_0)$, де $f \mid G_0 : G_0 \to \sigma$ є вкладенням, що реалізує $t_{G0}(G_0{}^0)$, $\{\overset{0}{Z}_j\}_{j=1}^{n} \subset G_0^0 \cup G_0^1$;

в) $G_3(\{Z_{3j}\}_{j=1}^{n})$ – простий цикл графа G_3, можливо із діагоналями.

4) Існує φ-перетворення графа $\sum_{i=1}^{2} G_i$ в граф G, визначене наступним чином: $\varphi(\sum_{i=1}^{2} G_i, \sum_{j=1}^{n}(y_{1j} \dot{+} y_{2j}) + (y^{\bullet}_{1j} \dot{+} y^{\bullet}_{2j})) \to (G, \{y_j\}_{j=1}^{n} \cup \{y^{\bullet}\})$, та яке задовольняє умовам:

а) $(\forall i, i = 1,2)[(G_i \neq K_4^{'}) \wedge ((G_i \cong K_{2,3}) \vee (G_i \approx K_4))]$;

б) $G_i(\{y_{ij}\}_{j=1}^n) = C_{G_i}^{n-1}(y_{i1}, y_{in}) + y^{\bullet}{}_{i1}$ – простий ланцюг довжини $n-1$ графа G_i, об'єднаний із ізольованою точкою $y^{\bullet}{}_{i1}$ графа G_i, яка не належить до підграфа $G_i(\{y_{ij}\}_{j=1}^n) = C_{G_i}^{n-1}(y_{i1}, y_{in})$, де $y_{i1} \neq y_{in}$, $\{y_{ij}\}_{j=1}^n \subset G_i^0 \cup G_i^1$, $i = 1,2$ (при $n = 0$ простий ланцюг вироджується в точку y_{i1}, причому $y^{\bullet}{}_{i1} = y_{i1}$);

в) $G(\{y_j\}_{j=1}^n)$ – простий ланцюг графа G довжини $n-1$, об'єднаний із ізольованою точкою $y^{\bullet}$, що не належить до підграфа $\varphi((G_i(\{y_{ij}\}_{j=1}^n))$ (при $n = 0$ простий ланцюг вироджується в точку y_1).

Доведення. Нехай G – зв'язний площинний граф із усіма суттєвими ребрами відносно числа досяжності множини вершин, що дорівнює 3, при операції видалення довільного ребра і задано вкладення $f, f: G \to \sigma$, яке реалізує $t_G(G^0), t_G(G^0) = t = 3$, $S_G(G^0) = \{s_i\}_{i=1}^3$ – множина 2-клітин, на границі яких виходять всі вершини графа G.

Будемо позначати через $M(G)$ множину усіх різних підграфів H графа G, побудованих для кожної пари $(s_i s_j)$, де $i \neq j$, 2-клітин з множини $S_G(G^0)$ як найменша за включенням частина H_{ij} графа G, яка задовольняє співвідношенню (*):

$$\left[\left(\left(G^0 \cap ds_i \subset H_{ij}^0\right) \wedge \left(H_{ij}^0 \cap \left(ds_j - ds_i\right) \neq \varnothing\right)\right) \vee \left[\left(\left(G^0 \cap ds_j \subset H_{ij}^0\right) \wedge \left(H_{ij}^0 \cap \left(ds_i - ds_j\right) \neq \varnothing\right)\right) \wedge \right.\right.$$
$$\left.\left. \wedge (H_{ij} \cong K_4) \vee (H_{ij} \cong K_{23})\right]\right].$$

Через $M'(G)$ – найменшу за включенням підмножину множини $M(G)$, що складається із найменших за включенням підграфів H_{ij} графа G, або частин цих підграфів, що задовольняють наступним умовам:

а) $G^0 \subseteq \bigcup\limits_{\forall H' \in M(G)} (H')^0$;

б) Якщо підграф H_{ij} (або його частина) гомеоморфний графові K_4, у якого або усі ребра графа 1-підрозділені, або жодне ребро графа K_4 не 1-підрозділено. Надалі, якщо не зроблені застереження, будемо вважати, що відносно елементів множина M' термін «підграф» графа G не виключає того, що цей елемент може бути частиною графа G. Наприклад, розглянемо наступне вкладення графа G в площину σ (рис. 1) та виділимо дві множини $S_i = \{s_{ij}\}_{j=1}^3, i = 1,2$, а саме

а) $ds_{11} = \{1,2,7,8\}$, $ds_{12} = \{2,3,7,8\}$, $ds_{13} = \{4,5,6,7\}$;

б) $ds_{21} = \{1,2,7,8\}$, $ds_{22} = \{1,2,3,4,5,6,7\}$, $ds_{23} = ds_{13}$.

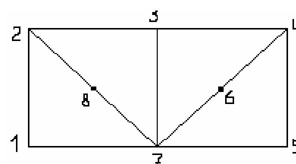


Рисунок 1 – Приклад графа для побудови множини М

Для кожного з них побудуємо множину $M_i, M_i = M(G)$:

$H_{12}^0 = \{1,2,3,7,8\}$, $H_{21} = \{1,2,7,8\}$, $H_{23}^0 = H_{32}^0$; $(H_{13}^0)' = \{1,2,6,7,8\}$, $(H_{13}^0)'' = \{1,2,4,7,8\}$,

$(H_{13}^0)''' = \{1,2,5,7,8\}$, $H_{13}^0 \in \{(H_{13}^0)', (H_{13}^0)'', (H_{13}^0)'''\}$, $H_{32}^0 = \{3,4,5,6,7\}$, $H_{31}^0 = \{1,4,5,6,7\}$, $M(G) = \{H_{12}, H_{13}', H_{13}'', H_{13}''', H_{21}, H_{31}, H_{32}\}$; $H_{12}^0 = \{1,2,7,8,3\}$, $H_{13}^0 = \{1,2,8,7,6,4,3\}$, $H_{21}^0 = H_{12}^0$, $H_{23}^0 = \{1,2,3,4,5,7,6\}$, $H_{32}^0 = \{4,5,6,7,3\}$, $M(G) = \{H_{12}, H_{13}, H_{23}, H_{32}\}$.

Неважко переконатися в тому, що приведені вище множини а) і б) вичерпують усі неізоморфні множини $S_G(G^0)$, тобто в результаті $M'(G) = \{H_{12}, H_{32}\}$.

Доведемо твердження 1). Так як граф K_4' є графом K_4 із всіма 1-підрозділеними ребрами та матиме властивість:

$$(\forall u)(u \in (K_4')^1)[(t_{K_4' \setminus u}((K_4')^0) = 2) \wedge (t_{K_4'}((K_4')^0) = 3)],$$

то матимемо включення: $K_4' \subset G$. З іншого боку, якщо $K_4' \subset G$, то знайдеться ребро u, $u \in G \setminus K_4'$. Твердження 1) доведено.

Нехай граф G неізоморфний графу K_4'. Наступні два випадки є можливими: 1) $|M| = m$, де $m = 2,3$. Нехай має місце випадок 2). Припустимо, що має місце рівність $M = \{H_i\}_{i=1}^2$. Внаслідок площинності графа G маємо три варіанти φ-перетворення (склеювання) двох графів з множини M, визначених одним із трьох варіантів: 1) за двома простими ланцюгами, 2) за двома різними парами простих ланцюгів, 3) за двома простими циклами.

Перший варіант назвемо лінійним за простим ланцюгом, другий нелінійним – за двома простими ланцюгами, третій – за простим циклом.

Доведемо твердження 2). Маємо наступні два варіанти φ-перетворення (склеювання) двох підграфів з множини M:

1) за двома простими ланцюгами,
2) за двома різними парами простих ланцюгів.

Тобто матимемо наступне співвідношення:

$$G[\bigcap_{i=1}^{2} H_i] = \sum_{j=1}^{n} C_G^{n_j}(a_j, b_j), \tag{1}$$

де $n \geq 0$, $n_j \geq 0$ (можливо, що $n_j = 0$, тоді простий ланцюг вироджується в точку a_j).

Оскільки $G \neq K_4'$, то із співвідношення (1) слідує існування φ-перетворення графа $\sum_{i=1}^{2} H_i$ в граф G, заданого наступним чином:

$$\varphi(\sum_{i=1}^{2} H_i, \sum_{i=1}^{n}(\sum_{j=1}^{n_1+1} C_{1ij} \dot{+} C_{2ij})) \rightarrow (G, \{\{a^*_{ij}\}_{j=1}^{ni}\}_{i=1}^{n}), \tag{2}$$

де $C_{H_k}^{n_i}(a_{k1}, a_{k(n_i+1)})$ – простий ланцюг підграфа H_k довжини n_i з кінцевими вершинами a_{ki1}, $a_{ki(n_i+1)}$, де $i = 1(1)n$, $k = 1,2$. Відзначимо, що множина $\{a_{kij}\}_{j=1}^{n_i+1}$ складається із вершин графа H_k та із внутрішніх точок його ребер, $\{a^*_{ij}\}_{j=1}^{n_i+1}$ – множина вершин простого ланцюга $C_G^{n_i}(a^*_{i1}, a^*_{i(n_i+1)})$ графа G із кінцевими вершинами a^*_{i1}, $a^*_{i(n_i+1)}$, такими що $\varphi(a_{1ij} \dot{+} a_{2ij}) = a^*_{ij}$, $j = 1(1)n_i$, $i = 1(1)n$.

Для $n = 1$ має місце варіант 1), і твердження 2) в цьому випадку доведене.

Для $n = 2$ маємо варіант 2). Доведемо праву частину наступною подвійної нерівності $0 \le p_1(L(\sum_{i=1}^{2} H_i, G)) \le 1$, бо ліва частина є тривіальною. Для цього використаємо метод доведення від зворотного. Припустимо, що для графа L φ-перетворення графа $\sum_{i=1}^{2} H_i$ в граф G, заданого в (1), де $L = L(\sum_{i=1}^{2} H_i, G)$, виконується нерівність: $p_1(L) > 1$. Тоді граф L матиме, принаймні, два простих цикли, кожен з яких означатиме виконання заданих в твердженні 2) φ-перетворень на точках щонайменше трьох різних пар простих ланцюгів без спільних точок, перші елементи кожної пари належатимуть простому циклу z графа H_1, а другі елементи кожної пари належатимуть простому циклу z' графа H_2. В результаті в 2-клітку *s*, де $s \in (\sigma \setminus f|_G(H_1)) \setminus \{s_1\}$, з границею z буде вкладено граф $f|_G(H_2)$, де вкладення $f, f: G \to \sigma$ реалізує $t_G(G^0)$, та утворено, принаймні, три нових 2-клітки з границями – простими циклами z_i, $i = 1(1)3$, які не можуть всі разом бути границями двох 2-кліток s_j, де $S_G(G^0) = \{s_j\}_{j=1}^{3}$, $j = 2,3$.

Це означатиме, що принаймні одне ребро графа G, яке належить одному з циклів z_i, не належатиме перетину двох 2-кліток s_j, s_i, які належать до множини $S_G(G^0)$, тобто будуть несуттєвими відносно $t_G(G^0)$ при операції його видалення. Тим самим матимемо суперечність умові 3-мінімальності графа G. Оскільки наше припущення є неправильним, то маємо нерівність $p_1(L) \le 1$, що й доводить подвійну нерівність. Оскільки в твердженні 2) маємо перетворення на одній парі простих ланцюгів, то доведення закінчено.

Доведемо твердження 3). Покладемо, що $M = \{H_i\}_{i=1}^{3}$. Для φ-перетворення графа $\sum_{i=1}^{3} H_i$ в граф G можливі тільки наступні два типи:

а) φ-перетворення типу (1) задане так само, як і φ-перетворення графа $\sum_{i=1}^{3} H_i$ в граф G, тобто на ребрах (або частинах ребер) графів H_i, $i = 1(1)3$, має ту властивість, що φ-образ графа $\sum_{i=1}^{2} H_i$ має принаймні одне ребро несуттєвим відносно $t_G(G^0)$. Причому ця властивість буде незалежно від того, має чи не має граф $L(\sum_{i=1}^{3} H_i, G)$ цикли;

б) φ-перетворення не типу (1) графа $\sum_{i=1}^{3} H_i$ в граф G, тобто задане так, що деякі φ-образи графів H_i мають спільні прості цикли. Кожна пара φ-образів цих графів H_i, H_j множини $M'(G)$ може мати не більше одного спільного простого цикла. Тоді мають місце наступні твердження, зформульовані з точністю до перенумерації елементів множини $M'(G)$:

1) існують елементи $\varphi(H_i)$, $i = 1, 2$ множини $M'(G)$ із спільним циклом та гомеоморфні графу $K_{2,3}$, які не мають спільних простих циклів з елементом $\varphi(H_3)$;

2) елементи $\varphi(H_i), i=1,2$ не мають спільних простих циклів, а элемент $\varphi(H_3)$, гомеоморфний $K_{2,3}$, має спільний простий цикл з елементом $\phi(\bigcup_{i=1}^{2} H_i)$. Твердження 3) доведено.

Доведемо твердження 4). Доведення випливатиме як частинний випадок із наведеного вище доведення твердження 2) та відрізнятиметься в тій частині, що стосується необхідної умови виродженості в точку простих ланцюгів другої пари. Доведення теореми закінчено.

3 Алгоритм побудови всіх 3-мінімальних площинних графів

Алгоритм для побудови всіх 3-мінімальних площинних графів спирається на теорему 1 та матиме наступний вигляд:

Вхідні дані: Множина $Л_1$ усіх неізоморфних ланцюгів графів для кожного з графів $К_4$, $К_{2,3}$, впорядкована за їхньою довжиною та із позначкою, для якої саме пари графів узятий ланцюг;

Вихідні дані: множина всіх 3-мінімальних графів G;

1. Будуємо множину $Л_2$ із всіх різних пар ланцюгів множини $Л_1$ та множину $Л_3$ з усіх різних двох пар ланцюгів із $Л_1$, а також множину $Л_4$, складену із різних пар тих елементів множини $Л_1$, які породжують в графах $К_4$ чи $К_{2,3}$ прості цикли без діагоналей;

2. Доки множина $Л_1$ непуста виконувати наступні дії:
   2.0. Беремо елемент x із $Л_1$, заносимо елемент x до списку $В_1$;
   2.1. $Л_1 := Л_1 \backslash x$;
   2.2. Доки множина $Л_1 \backslash В_1$ непуста виконувати наступні дії:
      2.2.1. Беремо елемент u із $Л_1 \backslash (В_1 + В_2)$, заносимо елемент u до списку $В_2$;
      2.2.2. Виконуємо ототожнення пар вершин чи точок пар графів $(К_4,К_4)$, чи $(К_4,К_{2,3})$, чи $(К_{2,3},К_4)$, чи $(К_{2,3},К_{2,3})$, зазначених як вершини чи точки ланцюгів пари (x,u), по всім типам можливих перетворень вибраної пари графів та отримаємо граф G;
      2.2.3. Визначимо число досяжності t множини всіх вершин графа G як мінімальне число простих циклів що покривають множину всіх вершин графа G.
      2.2.4 Якщо t=3, то виконати:
      Для кожного ребра e графа G виконаємо в циклі операцію зтягування в точку та для отриманого графа G_e, де $G := G_e$, виконуємо процедуру 2.2.3; Якщо t=3 то виконати кінець цикла по ребрам графа G, інакше виводимо граф G; інакше кінець цикла по ребрам; інакше кінець внутрішнього цикла;
   2.3. Кінець внутрішнього цикла;

3. Кінець зовнішнього цикла;

4. Доки множина $Л_2$ непуста виконувати наступні дії:
   4.0. Беремо елемент x із $Л_2$, заносимо елемент x до списку $В_3$;
   4.1. $Л_2 := Л_2 \backslash x$;
   4.2. Доки множина $Л_2 \backslash В_2$ непуста виконувати наступні дії:
      4.2.1. Беремо елемент u із $Л_2 \backslash (В_3 + В_4)$, заносимо елемент u до списку $В_4$;
      4.2.2. Виконуємо ототожнення пар вершин чи точок пар графів $(К_4,К_4)$, чи $(К_4,К_{2,3})$, чи $(К_{2,3},К_4)$, чи $(К_{2,3},К_{2,3})$, зазначених як вершини чи точки двох різних пар ланцюгів x та u, здійснені по всім типам можливих φ-перетворень для обраної пари графів та отримаємо граф G;

4.2.3. Визначимо число досяжності t множини всіх вершин графа G як мінімальне число простих циклів які покривають множину всіх вершин графа G;
4.2.4. Якщо t=3, то виконати:
Для кожного ребра e графа G виконаємо операцію зтягування в точку та для отриманого графа G_e, де G:= G_e, виконуємо процедуру 4.2.3;
Якщо t=3, то виконати кінець цикла по ребрам графа G, інакше виводимо граф G; інакше кінець цикла по ребрам;
4.3. Кінець внутрішнього цикла;
5. Кінець зовнішнього цикла;
6. Доки множина $Л_4$ непуста виконувати наступні дії:
6.0. Беремо елемент z із $Л_4$, заносимо елемент x до списку B_4;
6.1. $Л_4$:= $Л_4$\ z;
6.2. Доки множина $Л_4 \backslash B_4$ непуста виконувати наступні дії:
6.2.1. Беремо елемент u із $Л_2 \backslash (B_5 + B_4)$, заносимо елемент u до списку B_5;
6.2.2. Виконуємо ототожнення пар вершин чи точок пар графів (K_4,K_4), чи (K_4,$K_{2,3}$), чи ($K_{2,3}$,K_4), чи (,$K_{2,3}$,$K_{2,3}$), зазначених як вершини різних пар циклів, здійснені по всім можливим φ-перетворенням для обраної пари графів та отримаємо граф G;
6.2.3. Визначимо мінімальне число t простих циклів які покривають множину всіх вершин графа G;
6.2.4. Якщо t=3, то виконати:
Для кожного ребра e графа G виконаємо операцію зтягування в точку та для отриманого графа G_e, де G:= G_e , виконуємо процедуру 6.2.3;
Якщо t=3, то виконати кінець цикла по ребрам графа G, інакше виводимо граф G; інакше кінець цикла по ребрам;
6.3. Кінець внутрішнього цикла;
7. Кінець зовнішнього цикла;
8. Кінець роботи алгоритму.

Твердження 2. Алгоритм побудови всіх 3-мінімальних площинних графів є коректними та має поліноміальну складність.

Література

1. Хоменко М.П. φ-перетворення графів / Хоменко М.П. – 1971. – 384 с. – (Препринт / ІМ НАНУ) [Електронний ресурс]. – Режим доступу: http://www.kntu.kr.ua/mnsp/books.
2. Obstructions Sets for Outer-Cylindrical Graphs / [Archdeacon D., Bonnington C.P., Dean N., Hartsfield N.]. – Електронний ресурс, 2000. – 29 p.
3. Petrenjuk V. Characterization of the 3-minimal Planar Graph. Collection of the proceedings of a seminar of discrete mathematics and applications / Petrenjuk V. – Moscow : MGU, 1993. – 217 p.
4. Petrenjuk V. List of 3-minimal Planar Graphs / Petrenjuk V. – Preprint DNTB 31.10.86 #2450-86. 7p.
5. Dan Archdeacon. Topological graph theory: A survey. Congressus Numerantium // A Conference Journal on Numerical Themes, 115:5-54, 1996. Surveys in graph theory (San Francisco, CA, 1995), E-ресурс.

В.И. Петренюк
Идентичность нецилиндрических графов 3-минимальным плоским графам
На основании метода φ-преобразований установлен факт эквивалентности нецилиндрических и 3-минимальных плоских графов и предложен модифицированный алгоритм построения 3-минимальных плоских графов.

V.I. Petreniuk
Identity of Noncylindrical Graphs with 3-minimal Planar Graphs
Was detected fact of identity noncylindrical graphs with 3-minimal planar graphs and proposed new modification of algorithm for construction all 3-minimal graphs, there was based on method of φ-transformations of graphs.

Стаття надійшла до редакції 10.06.2010.